KISITSIZ OPTİMİZASYON

Kısıtsız optimizasyon herhangi bir kısıtlama olmaksızın bir fonksiyonun maksimum veya minimum değerlerinin araştırılması problemi ile uğraşır. Kısıtlarının da sağlanması gerekli olan bir çok uygulamalı optimizasyon problemi olmasına rağmen, kısıtsız optimizasyon teknikleri bazı nedenlerle önemlidir. Birçok algoritma kısıtlı problemleri, kısıtsız problemlere dönüştürerek çözer. Örneğin Lagrange çarpanları ve ceza fonksiyonları yöntemleri gibi. Diğer bazı yöntemler ise belirli bir yön bulup bu yön boyunca çözümler araştırır. Sonuç olarak bir çok kısıtsız optimizasyon tekniği kısıtlı problemlerin çözümünde de etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

Tek Değişkenli Optimizasyon

Yeterince küçük pozitif veya negatif bütün h değerleri için

$$f(x_0) \leq f(x_0 + h)$$

ise $f(x)$ fonksiyonu, $x = x_0$ noktasında yerel minimuma sahiptir.

Benzer olarak sıfıra yeterince yakın bütün h değerleri için

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h)$$

ise $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında yerel maksimuma sahiptir.

$f(x)$'in tanım bölgesindeki bütün x değerleri için

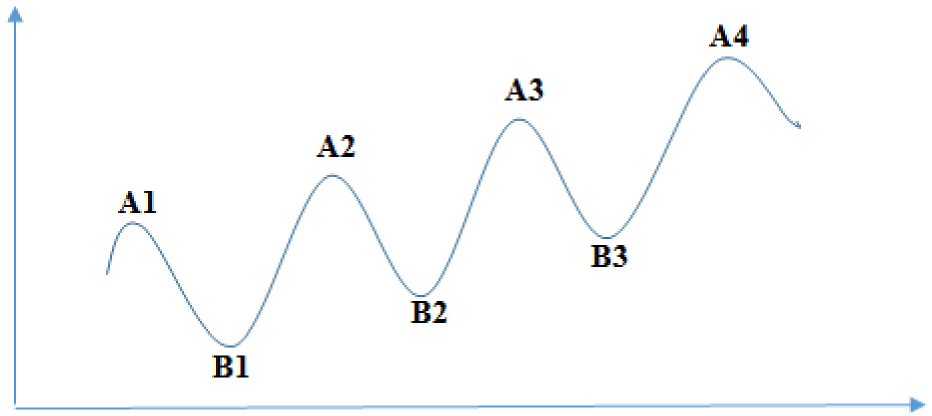
$$f(x_0) \leq f(x)$$

ise x_0 noktasına $f(x)$'in mutlak veya bölgesel minimum noktası adı verilir.

Benzer biçimde tanım bölgesindeki bütün x değerleri için

$$f(x_0) \geq f(x)$$

ise x_0 noktasına $f(x)$'in mutlak veya bölgesel maksimum noktası adı verilir.



Yerel minimum noktalar : **B1, B2, B3**

Yerel maksimum noktalar : **A1, A2, A3, A4**

Mutlak veya bölgesel mimimum noktalar : **B1**

Mutlak veya bölgesel maksimum noktalar : **A4**

Tek değişkenli optimizasyon problemi, $[a, b]$ aralığında $f(x)$'i minimize eden $x = x_0$ değerinin bulunmasıdır. Aşağıdaki iki teorem, tek değişkenli bir fonksiyonun yerel minimumu için gerek ve yeterli şartları verir.

Teorem 1.

Bir $f(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlansın. Eğer bu aralıkta fonksiyonun birinci türevi mevcutsa ve $a < x_0 < b$ olmak üzere x_0 noktasında bir yerel minimuma sahipse $f'(x_0) = 0$ dır.

İspat:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tanımlı ve var olduğu verilmiş. x_0 yerel minimum nokta olarak verildiğinden, sıfıra yeterince yakın bütün h değerleri için
$f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ olur. Bu yüzden

$h > 0$ için $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

ve

$h < 0$ için $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

yazılabilir. $h \to 0$ olarak sağdan ve soldan limit alınırsa

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

olur. Buradan $f'(x_0) \geq 0$ ve $f'(x_0) \leq 0$ olur. Bu da $f'(x_0) = 0$ olmasını gerektirir.

Genel olarak $f'(x_0) = 0$ yapan tüm noktalara durağan veya kritik nokta adı verilir. Maksimum yada minimum noktalara da ekstremum(uç) nokta denir.

Teorem 1, türevin sıfır olduğu her noktada bir maksimum yada bir minimum olduğunu garanti etmez. Yani bir maksimum yada minimum nokta varsa kesinlikle bu noktada türev sıfırdır. Ancak bir noktada türev sıfır ise bu noktada bir maksimum veya minimum olduğu hakkında kesin bir şey söylenemez.

$f'(x_0) = 0$ şartını sağlayan noktanın maksimum veya minimum olması için yeterli şartlar, Teorem 2 yardımıyla elde edilir.

Teorem 2.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0 \ ve \ f^n(x_0) \neq 0$ olsun.

i. n çift ve $f^n(x_0) > 0$ ise $f(x),\ x = x_0$ da yerel minimum noktasına sahiptir.
ii. n çift ve $f^n(x_0) < 0$ ise $f(x),\ x = x_0$ da yerel maksimum noktasına sahiptir.
iii. n tek ise $x = x_0$ noktası $f(x)$ fonksiyonu için bir dönüm(eyer) noktasıdır.

İspat: x_0 civarında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor açılımı yapılırsa; $0 < \theta \leq 1$ için

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0+h\theta)$$

elde edilir.

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$ olduğundan

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + h\theta)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + h\theta)$$

olur.

$f^n(x_0) \neq 0$ olduğunda x_0 etrafında öyle bir aralık bulunabilir ki; buradaki her x için n-inci türev olan $f^n(x)$, $f^n(x_0)$ ile aynı işaretlidir. Bu yüzden; bu aralığın her $(x_0 + h)$ noktasında $f^n(x_0 + h\theta)$, $f^n(x_0)$ ile de aynı işaretli olur.

n çift olduğunda $\frac{h^n}{n!}$ her zaman pozitif olur. Öyleyse $f(x_0 + h) - f(x_0)$, $f^n(x_0)$ ile aynı işaretli olur. Bu nedenle x_0 ;

$f^n(x_0) > 0$ ise yerel minimum

$f^n(x_0) < 0$ ise yerel maksimum

olur.

n tek ise $\frac{h^n}{n!}$, h-ın işaretine bağlı olarak bazen pozitif bazen de negatif olur. Öyleyse x_0 noktasında bir maksimum yada minimumdan bahsedilemez. Bu durumda x_0 noktası, dönüm noktası olur.

Örnek: $f(x) = 1{,}2x^5 - 4{,}5x^4 + 4x^3 + 10$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini belirleyiniz.

Çözüm:

$$f'(x) = 6x^4 - 18x^3 + 12x^2$$

$$= 6x^2(x^2 - 3x + 2) = 6x^2(x - 1)(x - 2)$$

$f'(x) = 0$ ise $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ elde edilir. Bunlar kritik noktalardır. Bu noktaların maksimum, minimum yada dönüm noktası olma durumlarını belirlemek için sonraki türevlere bakılır.

$f''(x) = 24x^3 - 54x^2 + 24x$

$x_0 = 0$ noktası için;

$f''(x_0) = f''(0) = 0$ olduğundan sonraki türeve geçilir.

$f'''(x) = 72x^2 - 108x + 24$

$f'''(x_0) = f'''(0) = 24 \neq 0$ olduğundan durulur ve türevin derecesine bakılır.

$n = 3$ tek olduğundan, $x_0 = 0$ noktası dönüm(eyer) noktasıdır.

$x_0 = 1$ noktası için;

$f''(x_0) = f''(1) = -6 \neq 0$ olduğundan durulur ve türevin derecesine bakılır.

$n = 2$ çift ve $f''(x_0) = f''(1) = -6 < 0$ olduğundan, $x_0 = 1$ noktası yerel maksimum noktadır.

$x_0 = 2$ noktası için;

$f''(x_0) = f''(2) = 24 \neq 0$ olduğundan durulur ve türevin derecesine bakılır.

$n = 2$ çift ve $f''(x_0) = f''(2) = 24 > 0$ olduğundan, $x_0 = 2$ noktası yerel minimum noktadır.

Fonksiyonun maksimum değeri: $f(1) = 10{,}7$

Fonksiyonun minimum değeri : $f(2) = 8{,}4$

olarak bulunur.

Soru: Aşağıdaki fonksiyonların ekstremum noktalarını bulunuz.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
c) $f(x) = (3x-2)^2(2x-3)^2$
d) $f(x) = x^4 + x^2$